1 Problema 1

Ad un disco metallico carico con $\sigma = 3.17\ 10^{-8}$ C/m^2 e raggio $R = 3$ cm è praticato un foro centrale circolare con diametro $d = 2r = 4$ mm. a) Si calcoli il campo elettrico $\vec{E}$ nel punto P ad un centrimetro dal centro lungo l'asse z, perpendicolare al disco. b) Quanto vale il potenziale nell'origine? E ad infinito? c) Quanto vale una carica negativa posta nell'origine se per spostarla fino all'infinito è necessario fornire $10nJ$ dall'esterno? d) Riesprimi questa carica anche in multipli della carica dell'elettrone.

a)..

b)..

c)..

d)..

Soluzioni:

a) Il sistema corrisponde ad un disco di raggio R pieno carico positivamente più un disco piccolo di raggio r carico negativamente. Il campo elettrico lungo l'asse è la somma di questi due contributi :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{u}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\hat{u}_z =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{u}_z$$

[Si può anche integrare dal raggio interno al raggio esterno, per ottenere la stessa formula, ma è più laborioso]. Ad un centimetro di distanza si ha:

$$\vec{E}(r = 0.01m) = 1189.83\ V/m$$

b) Integrando il campo elettrico per mezzo di $dV = -Edz$ si ottiene

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{r^2+z^2}\right)$$

e nell'origine questo vale

$$V(z=0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(R - r\right) \simeq 50.15V$$

c) Se è necessario fornirli significa che la carica è negativa e serve energia per sottrarla all'attrazione del disco positivo.

$$W = -q\Delta V \to q = -\frac{W}{V_0 - V_\infty} \simeq -1.994 \cdot 10^{-10}\ C$$

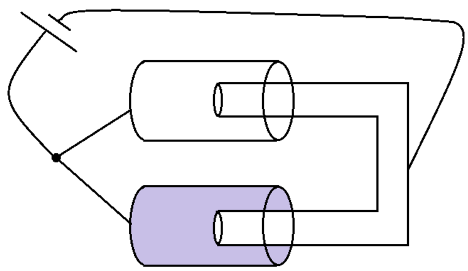
d) La posso riesprimere come:

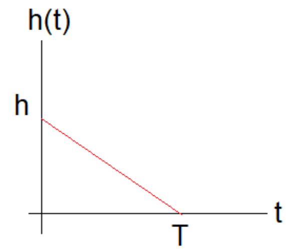
$$q = Ne \to N = q/e \simeq 1.25 \cdot 10^9$$

servono 1.25 miliardi di elettroni per fare q.

2 Problema 2

Un circuito è composto da un tubo metallico di diametro $d_1 = 2$ cm, piegato ad U e chiuso alle estremità. I due bracci entrano all'interno di due cilindri conduttori in modo coassiale, con raggio $R_2 = 2$ cm e a questo sistema è connesso un generatore di tensione da 12V come in figura. Un cilindro è riempito di un gas con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.2$.





a) Trascurando gli effetti di bordo, si trovi la capacità del sistema quando il tubo entra nei cilindri per una altezza $h = 2.81$ cm.
b) Quanto vale l'energia immagazzinata nel sistema dei due condensatori?
c) Se ora si perde il gas dal secondo cilindro come devo spostare il tubo in modo che l'energia immagazzinata non cambi?
d) Ritornando alla posizione iniziale con il secondo cilindro pieno di gas, si estrae il tubo dai cilindri in modo lineare come in figura (destra) in un tempo $T = 3.2$ s. Si calcoli la potenza necessaria per questa estrazione.

a)..

b)..

c)..

d)..

Soluzione:
a) I due cilindri sono condensatori in parallelo e hanno in generale una capacità totale che è la somma delle singole capacità, dove si ricordi che uno contiene gas:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)h}{ln(R_2/R_1)} \simeq 7.21pF$$

dato che le capacità in parallelo si sommano. Nella formula $R_1 = d_1/2$. Ovviamente qui si utilizza la formula per la capacità di un condensatore cilindrico e non di uno piano.

b) Avendo la capacità equivalente, l'energia immagazzinata vale

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = 5.19\ 10^{-10}J = 0.519\ nJ$$

c) L'energia deve essere costante, e dipende linearmente dalla capacità. La capacità diminuisce da $C \propto (1+\epsilon_r)$ a $C \propto (1+1)$, allora devo compensare con una nuova altezza della parte di tubo immersa nei cilindri, ovvero

$$(1+\epsilon_r)h = 2h' \ \Rightarrow\ h' = \frac{(1+\epsilon_r)h}{2} = 4.496\ cm$$

ovvero il tubo va inserito di più nei cilindri passando da 2.81 a 4.496 cm.

d) Assumendo una relazione lineare come in figura, in cui l'altezza inserita diventa zero al tempo T, si ha:

$$h(t) = h + \alpha t = h - \frac{h}{T}t$$

Il lavoro necessario eguaglia l'opposto della variazione di energia potenziale, $W = -\Delta U = -U_i$ dove l'energia iniziale è quella calcolata prima e quella finale è zero. La potenza è la derivata del lavoro nel tempo e quindi

$$P = \frac{dW}{dt} = -\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}V^2 \frac{2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)(h/T)}{ln(R_2/R_1)} = 1.62\ 10^{-10}\ W = 0.169\ nW$$